Session 2001

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option B : Systèmes Motorisés

Option C : Structures Métalliques

Option D : Bois et Matériaux Associés

Option E : Matériaux souples

Génie des matériaux

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Ce sujet nécessite 2 feuilles de papier millimétré.

<u>EXERCICE 1</u> (5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en z : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

2) a) Déterminer les réels b et c tels que pour tout complexe z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 + bz + c)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation en z : $z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 2 cm).
Soient A, B, E et F les points d'affixes respectives

$$z_A = 3 + 2i, \quad z_B = 3 - 2i, \quad z_E = \frac{5}{4} + i\,\frac{\sqrt{15}}{4} \text{ et } z_F = 3.$$

a) Placer les points A, B, E et F dans le plan complexe (sur papier millimétré).

b) Calculer les distances FA, FB et FE. En déduire que les points A, B et E appartiennent à un cercle (Γ) de centre F.

c) Quelle est la nature du triangle ABE ?

<u>EXERCICE 2</u> (4 points)

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y" + y = 0$.

2) On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormal passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

a) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

b) En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de x.

c) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

3) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, c'est-à-dire le réel m défini par :

$$m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

<u>PROBLÈME</u> (11 points)

<u>PARTIE I</u>

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -x + x\ln(x)$ (où ln désigne le logarithme népérien).

1) Résoudre dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$.

2) Résoudre dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $g(x) > 0$.

<u>PARTIE II</u>

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x^2\ln(x)$. On appelle (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unités : 2 cm).

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) Montrer que $f'(x) = g(x)$. Utiliser les résultats de la partie **I** pour établir le tableau de variations de f.

3) Calculer $f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$. On fera apparaître le détail des calculs.

4) Soit A le point d'abscisse 1 de (Γ). Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (Γ).

5) Tracer dans le repère $(O,\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ la tangente (T) ainsi que la partie de la courbe (Γ) relative à l'intervalle $]0\,;\,6]$.

6) Soit F la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{1}{6}x^3\ln(x) - \dfrac{11}{36}x^3$.

a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité dans le repère $(O,\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.